

极稀薄气体通过任意长管道的流动(一)

P. Clausing

编者按: 本文是克劳辛博士的一篇重要的论文。发表在 1932 年德国“物理年鉴”上 (Ann. Physik 5 2 (1932) 961)。近 50 年来, 这篇论文经常为真空物理工作者引用, 但一直没有中文译文。为此, 我们将赵乃石同志这篇译文介绍给广大读者。译文系根据 1971 年第 5 期的美国“真空科学与技术杂志”的英译文译出的。全文较长, 我们分期发表。

1. 稳态分子流的克努曾 (Knudsen)、斯莫洛左夫斯基 (Smoluchowski)、达许曼 (Dushman) 公式; 2. 各式对动力学变量的变换; 通过几率; 3. 达许曼公式的推导; 4. 圆柱形短管问题; 5. 圆柱形长管问题; 6. 流动方程在高真空工程中的应用; 小结。

1. 稳态分子流的克努曾、斯莫洛左夫斯基、达许曼公式

关于极稀薄气体通过任意截面管道的稳态流动, 克努曾给出一个公式^[1]:

$$J = \frac{8}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{S^2}{sL} \cdot \frac{P_1 - P_2}{d^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

式中, J 是每秒的气体流量, 以单位压强下占有的体积测出; d 是单位压强下的气体密度; S 是管道的截面积; s 是截面的周长; L 是管道的长度。 P_1 和 P_2 是管道联结的两个容器的压强, 并认为第一个容器总是在第二个容器的左边 (文内的下标 1 和 2 专指这两个容器)。

为推出 (1) 式, 应假设 L 与管径和分子的平均自由程相比是很大的; 还假设分子从管壁离开时按余弦定律扩散^[2]。

对于半径为 r 的圆柱形长管道, 由 (1) 式有:

$$J = \frac{4(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{3} \cdot \frac{r^3}{L} \cdot \frac{P_1 - P_2}{d^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

对于一个很薄的壁上的小孔, 克努曾求出^[6]:

$$J = \frac{S}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{P_1 - P_2}{d^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

对于圆孔有:

$$J = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{r^2}{d^{\frac{1}{2}}} (P_1 - P_2) \quad (4)$$

斯莫洛左夫斯基已指出 (1) 式是错误的, 应当以

$$J = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{A}{L} \cdot \frac{P_1 - P_2}{d^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

来代替, 其中 $A = \int_s \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 \cos \theta d\theta ds$, ρ 是截面的弦长, 它与 ds 的法线成 θ 角^[8]。(2)

式的正确性可能纯属偶然, 因为, 对圆柱形管道来说, 克努曾方程的误差可以忽略不计。

如上所述, (2) 和 (5) 式仅对较长的管道才适用。当 $L=0$ 时, $J \rightarrow \infty$, 无论如何

也不会成为 (3) 式。

达许曼首先提出一个也适用于短管的公式^[10], 在 $L=0$ 时, 不是 $J=\infty$, 而是 (3) 式 (为实用的原因, 只考虑了圆柱形管道和圆孔)。

我曾经推导过另外一种公式^[9, 11, 12]。虽然在 $L/r=0$ 和 $L/r\sim\infty$ 时与达许曼公式有同样的结果 (即克努曾公式 (2) 和 (4)) , 但是, 在中间区段两式偏离甚大。本文希望阐明达许曼公式只能是一种粗糙的近似, 我的公式才是短管问题的严格解。

达许曼是以如下方式来处理的。(2) 和 (4) 式可以写为

$$J = \frac{P_1 - P_2}{\omega'}, \quad \omega' = \frac{3Ld^{\frac{1}{2}}}{4(2\pi)^{\frac{1}{2}}r^3} \quad (6)$$

$$J = \frac{P_1 - P_2}{\omega''}, \quad \omega'' = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}}}{r^2} \quad (7)$$

应把 ω 看成气体的流阻。“因而, 有直径为 $2r$, 长为 L , 联结处于低压强的两个容器的管道, 其总流阻是”

$$\omega = \omega' + \omega'' \quad (8)$$

因此

$$J = \frac{P_1 - P_2}{\omega' + \omega''} \quad (9)$$

我们在第 3 部分将要证明, 这两个流阻的相加是有物理基础的; 但应注意: 由 $L \gg r$ 推出的长管公式不能用于短管。这一结论并未予以专门证明。

2. 各式对动力学变量的变换; 通过几率

利用已知的气体动力学公式

$$P = \frac{\pi}{8} nmu^2; \quad d = \frac{8}{\pi u^2}; \quad J = \frac{\pi}{8} mu^2 K \quad (10)$$

和^[13]

$$v = \frac{1}{4} nu \quad (11)$$

式中 n 是每立方厘米的分子数; m 是分子质量; u 是分子的平均速度; K 是每秒进入第二容器的分子数; v 是入射率, 等于每秒打在每平方厘米壁上的气体分子数^(*)。(2) ~ (5) 式可变换为如下对应的形式:

$$K = (8r/3L) \cdot \pi r^2 v_1 \quad (12)$$

$$K = 1 \cdot Sv_1 \quad (13)$$

$$K = 1 \cdot \pi r^2 v_1 \quad (14)$$

$$K = (A/2Ls) \cdot Sv_1 \quad (15)$$

为简便起见, 已假定 $P_2=0$ 。如果 $P_2 \neq 0$, 为获得上述结果, 只需把两种流动 ($P_1=P_1$, $P_2=0$ 和 $P_1=0$, $P_2=P_2$) 迭加起来就可以了。

现在对 (12) ~ (15) 式作如下解释。它们的右端的第二项表示每秒碰在管道左孔的分子数, 故第一项就给出一个百分比, 表示从左边进入的分子有多少能到达第二个容器。我们称这个百分比为通过几率, 并用 W 表示。 W 是从左边容器进入的一个分子能到达右边容器而不再返回左边的几率。于是 (12) ~ (15) 式可归结为

$$K = W \cdot Sv_1 \quad (16)$$

* 英译文误为每立方厘米。——译者注

根据这种解释, (16) 式显然比只适用于无限长管和无限短管的 (12) ~ (15) 式有更为普遍的适用范围。(16) 式对两个容器之间的任何联管都是适用的。而且在一定的极限范围内, 甚至还可以随意规定给定联管的入口孔径。

现在的问题是确定无因次量 W , 因为它只与管道的形状有关, 所以这是一个纯粹的几何问题。

如果假设所有分子在壁上都是扩散散射的话^[14], 那么该问题对任何管道都有一个特解 W 。除非希望检验散射是否确是扩散的^[15], 否则物理证明是多余的。按照盖德^[16]和我本人^[3]的观点, 热力学第二定律要求分子离开壁的角度分布遵循余弦定律。如果没有反射只有散射的话, 必须遵循余弦定律, 对扩散而言也是这样。这时, 通过几率的实验证明其实是在极低压区域内对热力学第二定律的一种考验。

由 (16) 式对 K 的实验测定相当于测定 v_1 , 或由于假设每立方厘米的分子数已知, 从而相当于测定分子的平均速度 u 。这是根据 (11) 式与速度分布无关而得出的。另一方面, u 可以根据分子的麦克斯韦速度分布律计算, 所以, K 的实验测定只不过是速度分布的部分检验。

以前, 我曾以“分子速度的测量和余弦定律的检验”^[17]为题发表了关于氩、氖通过圆柱形长管瞬态分子流的实验工作时就已强调这一论断。

如果有反射, 那么对于每一个方向和速度, 局部平衡原理要求发射分子数与入射分子数相等。一般来说, 发射分子不遵循余弦定律。例如, 拿掠入射来说, 如以单面反射为主, 就是这种情况。回顾斯特恩 (Stern) 和依斯特曼 (Esterman) 关于分子束的精细衍射实验, 出现了比单向反射复杂得多的反射。

在部分反射的情况下, 通过几率与以前测量的结果完全不同。一般说来, 就是只计算 W 的这些新值, 也会遇到很大的困难。只有当单向反射的几率 ρ 对一切角度都相同的情况下才能较容易地被确定, 即

$$W_p = [(1 + \rho)/(1 - \rho)] \cdot W \quad (17)$$

其中, 几率 ρ 是反射系数^[3~5, 7]。所以, 如果在流动实验中发现有不同的 K 值, 必须进行如下的说明: 如假设的是麦克斯韦分布, 则发生能用 (17) 式的 ρ 值从定量上表征与管道中流动有关的反射^[20]。就实用而言, 大概这是重要的, 但没有理论上的意义。

所以, 流动实验只能告诉我们是否有反射发生; 而不能提供与之有关的定量信息, 即流动实验给予我们的只是已知的信息。

在第四部分中, 我们将要计算任意长的圆柱形管道的通过几率; 第五部份是关于与其半径相比较是很长的管道的特殊情况。

3. 达许曼公式的推导^[22]。

现在将说明达许曼的 (9) 式是怎样推导出来的。为此, 我们指出克努曾长管公式的实质性。利用 (10) 和 (11) 式, (1) 式可化为^[23]。

$$K = (16S/3\pi L) \cdot Sv_1 \quad (18)$$

克努曾认为管道中的气体有一定的速度 c , 对于整个管道, 它不能看成常数。在 dt 秒的时间内, 有 $Scdt/n$ 个分子通过任一已知截面, 因为此数也等于 Kdt , 所以 $c = K/nS$ 。

如果每秒在每平方厘米的管壁上的冲量为 B , 克努曾曾略有异议地发现(我们暂不理睬)

$$B = (3\pi/32) \cdot nmuc \quad (19)$$

所以, 每秒在管壁的环形面积元 sdx 上 (x 沿管道从 0 变到 L) 传递的冲量为

$$(3\pi/32) \cdot n\mu \cdot (K/nS) \cdot sdx \quad (20)$$

而在整个管道上为

$$(3\pi/32) \cdot \mu K \cdot (sL/S) \quad (21)$$

此值等于 (18) 式给出的从管道左端施加的力 $P_1S = (\pi/8) \cdot n_1\mu u^2S$ 。

然而此式应有一点修正, 这正是克努曾未曾考虑的。

来自管道左端的力等于每秒来自管道左端的作用冲量。这个冲量由两部分组成: 一部分是进入管道的 Sv_1 个分子给与管道的冲量; 另一部份是从管道返回进入第一容器的 $(Sv_1 - K)$ 个分子传递的冲量。这两部分冲量都指向右方。如果 $K=0$, 则从左端作用在管道上的力应由具有此冲量的 $2Sv_1$ 个分子所贡献; 如果 K 与 Sv_1 相比不能忽略, 则该量只能由 $(2Sv_1 - K)$ 个分子所贡献。因此, 从左端作用在管道上的力显然不是 P_1S , 而是

$$[(2Sv_1 - K)/2Sv_1] \cdot P_1S \quad (22)$$

并指向右方。类似地, 右端的作用力为

$$(k/2Sv_1) \cdot P_1S \quad (23)$$

并指向左方。另外, 如果作用在管道上的总力等于 (21) 式, 则利用 $P_1 = (\pi/8) \cdot n_1\mu u^2 = (\pi/2) \cdot v_1\mu u$ 可求出确定 K 的下式:

$$\frac{3\pi}{32} \cdot \mu K \cdot \frac{sL}{S} = \frac{2Sv_1 - 2K}{2Sv_1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot v_1\mu uS \quad (24)$$

此式的解为

$$K = \frac{16S/3s}{L + 16S/3s} \cdot Sv_1 \quad (25)$$

由 $P_2=0$, 并利用 (6), (7), (10), (11) 式, 达许曼公式 (9) 有

$$K = W \cdot Sv_1 = \frac{8r/3}{L + 8r/3} \cdot \pi r^2 v_1 \quad (26)$$

于是, 如取 (25) 式的 $S = \pi r^2$, $s = 2\pi r$, 则与 (26) 式有相同的 K 。

可以看出, 克努曾本应发现 (25) 式能代替长管公式 (1) 或 (18)。如果认为 (1) 式不正确, 而 (2) 或 (12) 式是正确的, 那么 (25) 式显然也是不正确的。但是, (26) 式确实给出一个圆柱形长管 (不是无限长) 问题的严格二级近似。

鉴于 $L/r=0$ 时从 (26) 式不能导出 $K=\infty$ 而是 (14) 式, 因而不能证明它对短管的适用性, 只有可能近似地应用。(25) 式的证明告诉我们如何把管道的总流阻分为管道本身的流导和孔的流导。入口孔和出口孔的流阻同为 $\omega''/2$; 再引入长管本身的流阻 ω' , 得到总流阻 ω (参看 (6) ~ (8) 式)。尽管流阻相加有某种物理根据, 但我不认为这是有道理的。分子能够自由进入真空的开口具有流阻的概念仍然还是难以理解的。因此, 我坚持认为把这个概念引入短管是不合适的*。

另一方面, 我也承认流阻的概念以及它们相加的可能性, 这对于真空工程说来确实很重要。在这一点上, 短管的流阻就很有用。在本文文末我们再讨论这个问题。(未完待续)

* 请读者将现代有关这方面的概念与之进行比较, 以便更好地理解作者的观点。—编者注

参 考 文 献(及注释)

- [1] M. Knudsen, Ann. Physik 4 28 (1909) 75
- [2] 余弦定律的意义参阅[3]; 余弦定律的近代试验参阅[4, 5]。
- [3] P. Clausing, Ann. Physik 5 4 (1930) 533
- [4] P. Clausing, Ann. Physik 5 7 (1930) 489
- [5] P. Clausing, Ann. Physik 5 7 (1930) 569
- [6] M. Knudsen, Ann. Physik 4 28 (1909) 999
- [7] M. V. Smoluchowski, Ann. Physik 4 33 (1910) 1559
- [8] 计算(5)式的特殊情况请参阅[7]的矩形管道; 以及资料[9]中的非同心轴圆管和同心轴圆管。
- [9] P. Clausing, Physica 9 (1929) 65
- [10] S. Dushman, "Production and [Measurement of High Vacuum" Schenectady (1922) 32, Int. Crit. Tabl. I, New York (1926) 91, J. Franklin 211, (1931) 689
- [11] P. Clausing, Verslag, Amsterdam 35 (1926) 1023
- [12] P. Clausing, Leyden 学术报告, Amsterdam (1928)
- [13] 关于该式不用积分的简便证明请参阅[12] (156 页)
- [14] 我们认为“反射”一词是壁上的一种“弹跳”形式, 对每个分子说来, 壁上的发射特性与入射特性有关。相反的情况, 我们叫做“散射”。按余弦定律, 散射又叫做“扩散”。漫射包括“表面吸附”和“发射”[8]。
- [15] 不能这样证明, 散射就是扩散。容易看出: 有许多散射定律, 对于已知管道, 能得出遵循余弦定律的 W 。只有以形状完全不同的管道作许多流动实验所获得的结果才能证明其它的散射定律是不适用的(不限于只用不同的 r/L 的圆柱形长管)。当时, 从原理上的这类批评比对实践议论的多, 这就表明早期的流动实验对余弦定律证明的不完备性。
- [16] W. Gaede, Ann. Physik 4 41 (1913) 289
- [17] 参阅[5]。本文涉及较少, 在[5]中, 不是 K 而是平均渡越时间 $t = L^2/4ru$ 起主要作用。这是因为我观测过非稳态流动, 而其它的实验都测量“短时稳态”的流动。
- [18] 参阅[3]
- [19] O. Stern, Naturwiss 17 (1929) 1391; I. Esterman et al, Z. Physik 61 (1930) 95
- [20] 盖德甚至发现 $\rho = -Z$ [6]。他认为 Z 是碰在壁上的分子沿入射方向“回跳”的几率[3, 21]。
- [21] P. Clausing, Ann. Physik 5 4 (1930) 567
- [22] 参阅[12]
- [23] 值得注意的是, 只要把流动看成是扩散系数为 $\frac{1}{3}\lambda u$ 的扩散, 也能导出(18)式。 λ 是管内分子的平均自由程。按照克劳修斯的观点应等于 $4S/s$ 。然而, 理论上没有推出这个结论。

(赵乃石译自 "J. Vac. Sci. Technol." 8 5 (1971) 636, 冯玉国, 谢燮校)